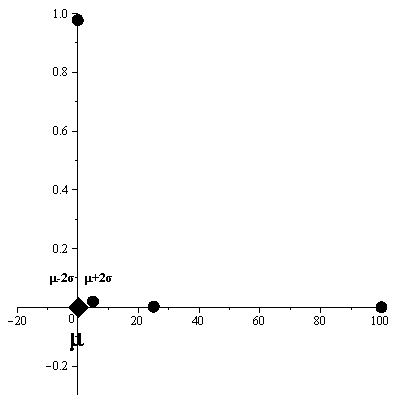
**Tema: Desigualdad de Chebyshev.**

**Motivación del tema:** Tomemos cualesquiera 2 funciones de densidad, discretas o continuas, por ejemplo,

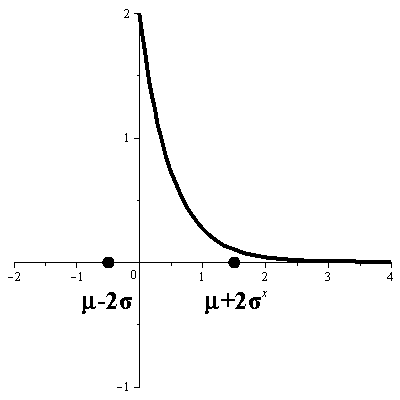
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 20 | 100 | 0 |
|  | 0.02 | 0.002 | 0.0005 | 0.9775 |

y

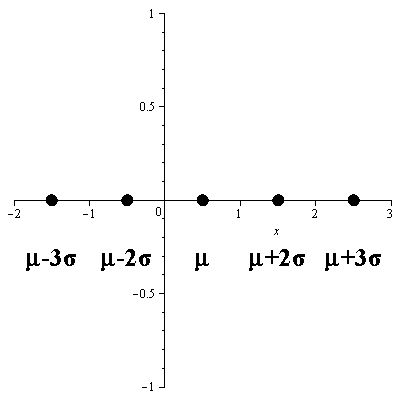
Predecimos que teniendo y de estas distribuciones, entonces al menos el 75% de los datos distan de la media en menos de . Por ejemplo, para la tabla y . Para comprobar lo afirmado calculamos la siguiente probabilidad



Lo mismo se puede hacer para la función de densidad continua, donde y , entonces calculamos



Inclusive a puro ojo se ve en las gráficas que por lo menos el 75% de los datos están en el intervalo



La desigualdad de Chebyshev nos ayuda a precisar esto, pues ella nos da, para cualquier variable aleatoria continua o discreta, el porcentaje de datos que están alejados de la media por 2, 3, 4, , , , desviaciones estándar

|  |  |
| --- | --- |
| Distancia | Porcentaje de Datos en el Intervalo |
|  | 75% |
|  | 88% |
|  | 93% |

De aquí observamos que si la desviación estándar es pequeña entonces la media es una buena representante de la población.

En general, la desigualdad de Chebyshev dice que la cantidad de datos que distan de la media en veces la desviación estándar es por lo menos el , o en ecuaciones

Por ejemplo, cuando la desigualdad dice que el porcentaje de datos que están entre y , porque es equivalente a , es por lo menos el 75%, porque , o también que

**Ejemplo 1.** Otra forma de motivar el tema es porque nos ayuda a aproximar probabilidades de una variable aleatoria en un intervalo sin conocer la función de densidad, por ejemplo, se ha observado que el promedio de clientes por día , que acuden a un mostrador es de 20 con una variación de entre 18 y 22 clientes. No se conoce la distribución de probabilidad, ¿cómo puede calcular la probabilidad con la desigualdad ? Sustituimos y para obtener

que la podemos escribir como

Entonces haciendo obtenemos la desigualdad

que es la probabilidad que queríamos calcular.

**Teorema 1. Desigualdad de Chebyshev.** Supongamos que es una variable aleatoria continua o discreta con media y varianza . Entonces para cualquier número positivo

o

**Ejemplo 2.** Reemplazando en la desigualdad de Chebyshev se obtiene

o

En palabras, la probabilidad de que difiera de su media por más de 2 desviaciones estándar es a lo más del 25% o la probabilidad de que difiera de su media por menos de 2 desviaciones estándar es por lo menos del 75%. O al menos el 75% de los datos están alrededor de la media, para cualquier distribución.

**Ejemplo 3.** Una variable aleatoria tiene una media de y varianza . Utilice el teorema de Chebyshev para calcular el valor de la constante tal que .

**Solución.** Tomando la desigualdad con , se deduce que . Así . Sustituyendo y obtenemos .

**Demostración del teorema 1.** Empezamos con la varianza

Como cada integral es positiva la varianza es mayor o igual que la suma de la primera y tercera integral

pero en ambas integrales entonces

**Ejercicios**

1. Una variable aleatoria tiene media 3 y varianza 2. Use la desigualdad de Chebyshev para obtener un límite superior para (a) , (b) .

Respuesta: (a) ½, (b) 2.

1. Una variable aleatoria tiene función de densidad . (a) Encuentre , (b) use la desigualdad de Chebyshev para obtener un límite superior en comparar con el resultado en(a).

Respuesta: (a) , (b) 0.5.